Nom : ______________________________

Examen maison – fonctions logarithmiques et exponentielles.

1. **Résous** les équations suivantes (et donne les réponses au millième près si nécessaire)

a) $256^{\left(x^3\right)}=8$

b) $4^x \cdot \sqrt{2} \cdot \left(\dfrac{1}{2^{-1}}\right)^2 = 2^{x+1}$

c) $5 \cdot 2^{x+2} - 3 \cdot 2^{x-1} - 6 \cdot 2^{x+1} = \dfrac{13}{8}$

d) $7^x = 5^{2+x}$

e) $\log_2(\log_2(\log_2(\log_2(\log_2 x))))=1$ f) $\log_2(x+1)+\log_2 5=3$

g) $\log_{\frac{1}{2}}(3-4x)=\log_{\frac{1}{2}}(x^2+2)+3$ h) $\dfrac{\log_4(7x-5)}{\log_4(2x-3)}=1$

2. **Trouve les réciproques** des fonctions suivantes et trouve l**es zéros** et **les ordonnées à l'origine** de ces réciproques.

a) $f(x)=\frac{2}{3}\cdot 8^{11x-\frac{1}{3}}-\frac{7}{8}$

b) $g(x)=-2\log_{\frac{1}{4}}(7x-\frac{1}{8})+11$

3. Sachant que $\log 2 = 0{,}30$ $\log 3 = 0{,}48$ $\log 5 = 0{,}70$ $\log 7 = 0{,}85$
détermine les logarithmes suivants en appliquant les propriétés appropriées.

a) $\log 7^5$ b) $\log 0{,}5$ c) $\dfrac{\log 20}{\log 40}$ d) $\log\sqrt{\dfrac{35}{6}}$

4. **Résous** les inéquations suivantes

a) $\ln(3x - 8) < \ln(2 - x)$ b) $\log(x^2) > (\log x)^2$

5. Chaque année, les matières en suspension dans un lac se déposent au fond pour former une couche sédimentaire.
Les sédimentologues utilisent la règle $P(x) = 150\ (1 - e^{(-0{,}02x)})$ pour connaître la profondeur, en cm, à laquelle on doit creuser pour obtenir un échantillon de sol âgé de x années.
a) **À quelle profondeur doit-on creuser** si on veut analyser la couche sédimentaire formée il y a deux ans ?

b) On creuse à une profondeur de 79,85 cm dans le lac. **De combien d'années date** la dernière couche sédimentaire de cet échantillon ?

c) **Quelle est la règle** représentant l'âge de la dernière couche sédimentaire atteinte en fonction de la profondeur creusée ?

6. Dans un film de science-fiction, un savant fou informe notre héros qu'en appuyant sur un bouton, 1000 molécules d'oxygène seront instantanément transformées en molécules de gaz hilarant. Au bout de 2 heures, 20000 molécules d'oxygène auront subi la transformation. Il informe aussi notre héros que plus on s'approchera de l'heure fatidique (24 heures après avoir appuyé sur le bouton) plus le nombre de molécules transformées sera astronomique. Une chose est certaine, ajoute-t-il, au bout de 24 heures, toutes les molécules auront été transformées, ce qui provoquera la mort (par le rire) de toute la population de la planète. Si notre héros veut sauver la planète, il doit libérer dans l'atmosphère l'antidote avant que le nombre de molécules transformées atteigne 1 000 000. Notre héros, ayant reconnu instantanément que la situation est représentée par un modèle exponentiel, a calculé qu'il dispose de x heures pour sauver la planète du fou-rire mortel. Le savant fou vient d'appuyer sur le bouton.
   Quelle est la valeur de x ?

7. La population d'une petite ville de région augmente de 1,2% par année. La mairesse de cette ville décide d'observer ce phénomène. La formule qui explique cela est
$f(x) = 14\ 005(1{,}012)^x$ où x représente le nombre d'année.
L'observation s'étend de 1990 à 2007.
a) **Combien y avait-il d'habitants** au début de l'étude?

b) **Trouve le domaine et l'image** de cette fonction selon le contexte

c) Quel était l**e nombre d'habitants en 2005**?

d) **Dans combien d'année** la population sera-t-elle de 20 000 habitants

8. Des chercheurs analyses une certaine forme de bactérie. Au début de l'expérience, ils en avaient 23. Ils observent qu'elles doublent au 3 heures. Dans **combien d'heures** l'expérience comptera-t-elle 10 000 bactéries?

9. Lorsque je fais du vélo, j'aime accélérer graduellement ma vitesse sur un certain laps de temps. Lorsque je roule 25 km/h, j'augmente ma vitesse de 8% aux 10 minutes et ce, pendant une heure. Par la suite, je conserve la même vitesse l'heure suivante. La dernière heure, je diminue ma vitesse de 4% aux 5 minutes.
   a) **À quelle vitesse** est-ce que je roule à la fin de mes 3 heures de vélo?

   b) À quel**s** moment**s** est-ce que je roule 32 km/h?

10. Un microbiologiste observe deux populations de bactéries.
    Lundi dernier, il estimait la 1re population de bactéries à 2000 et la 2e population, à 2 048 000.
    Il remarque ensuite que la 1re population double à tous les jours tandis que la 2e diminue de moitié à chaque jour. **Après combien de jours** les deux populations comptent-elles le même nombre de bactéries?

11. Le Carbone 14 est utilisé pour connaître à quel moment est décédé un individu ou un organisme vivant quelconque. Par exemple, on a pu savoir à quelle époque remontait certaines momies égyptiennes de cette façon. On sait que la demi-vie du Carbone 14 est d'environ 5734 ans (on définit la demi-vie par le moment que ça prend pour qu'il reste la moitié de l'élément en question).

a) On trouve un fossile de rat qui contient 10% de la quantité normale de Carbone 14. **À quel moment** remonte la mort de ce rat?

b) Si on recueille 12g de Carbone 14 sur une aile de chauve-souris au moment de sa mort, **quelle sera la quantité de Carbone 14** recueillie sur la même aile 60 ans après la mort de cette chauve-souris?

c) Est-ce que le Carbone 14 peut être utilisé pour effectuer la datation exacte d'un squelette de dinosaure (en passant, ils sont exterminés depuis plus de 65 000 000 d'années). **Expliquez dans vos propres mots** en demeurant dans un contexte mathématique (indice : internet)

12. Après ***t*** années, lorsque les intérêts sont versés ***n*** fois par année, un capital $\mathbf{C_0}$ placé à un taux d'intérêt annuel ***i*** devient

$$C(t)=c_0\left(1+\frac{i}{n}\right)^{nt}$$

Guillaume veut placer 2 000 $ pendant 2 années. On lui offre deux types de placements.

Placement A	**Placement B**
Taux d'intérêt annuel de 5 % Intérêts versés 1 fois par année	Taux d'intérêts annuel de 4,2 % Intérêts versés 12 fois par année

Guillaume choisit le placement A qui est le plus avantageux.
Pendant **combien de temps**, au mois près, Guillaume aurait-il dû placer son argent dans le placement B pour obtenir la même somme que celle qu'il obtiendra dans le placement A?

13. Une espèce d'oiseaux est en voie de disparition. Le dernier dénombrement en établit le nombre à 200. Depuis, pour protéger l'espèce, on en a interdit la chasse. Ainsi, les biologistes affirment que leur nombre doublera à tous les 6 mois.
Ils estiment que l'espèce sera sauvée lorsque sa population aura atteint 18 500 oiseaux.
Combien d'années doit-on attendre pour que cette espèce ne soit plus menacée de disparaître ?

14. **Démontre** que $\frac{l}{\log_2 x}+\frac{l}{\log_3 x}+\frac{l}{\log_4 x}=\frac{l}{\log_{24} x}$

15. Selon un psychologue, si on soumet une liste de 100 mots à une personne, la fonction

$N(t)=\frac{720}{10+(\ln t)^2}$ où (t ≥ 1)

représente le nombre de mots que cette personne se souviendra après t heures d'étude.

a) **Combien de mots** cette personne se souviendra-t-elle après 2 heures d'étude?

b) **Après combien d'heures** d'étude la personne se souvient de 60 mots?